

Остатки от деления — целевой листок.

1. Найдите остаток от деления а) 9^{100} на 8; б) 7^{99} на 8; в) 2017^{2016} на 8.
2. Катя с пятью подружками купили с собой в лагерь огромный рюкзак конфет. Они распределили конфеты поровну на 24 дня и еще 18 конфет осталось на дорогу домой. По дороге в лагерь девочки поссорились и поделили конфеты поровну. Катя распределила свои конфеты поровну на 24 дня, а остаток отложила на обратную дорогу. Какое количество конфет могло быть отложено?
3. На Поле Чудес растут деревья с золотыми монетами. Каждую ночь на каждом дереве вырастает по одной новой монете. 1 февраля на деревьях было всего 1000 монет. В один из следующих февральских дней Буратино посадил еще одно дерево, и 1 марта на деревьях оказалось всего 2400 монет. В какой день Буратино посадил дерево?
4. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом натуральном n .
5. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n .
6. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n .
7. Даны натуральные числа a , b и c . Известно, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.
8. Даны натуральные числа a и b . Известно, что $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что тогда $a^2 + b^2$ делится и на 441.
9. Даны натуральные числа a , b и c . Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 - 7$ не делится на 8.
10. Найдите последнюю цифру числа 2017^{2016} .
11. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
12. Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7} .
13. Известно, что p и $p + 21$ — простые числа. Найдите p .
14. Известно, что p , $2p + 1$, $4p + 1$ — простые числа. Найдите p .
15. Известно, что p и $8p^2 + 1$ — простые числа. Найдите p .
16. Известно, что p и $p^2 + 2$ — простые числа. Докажите, что $p^3 + 2$ — также простое число.
17. Докажите, что не существует натуральных чисел a и b таких, что $a^2 - 3b^2 = 8$.
18. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.
19. Известно, что p , $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ — простые числа. Найдите p .
20. Даны натуральные числа x , y и z , причем $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.
21. Степа играл в солдатиков. Сначала он попытался построить их парами, но один солдатик оказался лишним. Тогда Степа стал строить солдат тройками, но снова один остался. Та же история повторялась и при построениях по 4, по 5 и по 6. Степа уже приготовился выбрасывать непослушного, но тут ему наконец удалось построить всех в колонну по 7. Сколько солдат могло быть у Степы, если их было меньше 1000?